На правах рукописи

АСХАТОВ РАДИК МУХАМЕТГАЛЕЕВИЧ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ И ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань 2000

Работа выполнена на кафедре математического анализа Казанского государственного педагогического университета

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Ф. Г. Мухлисов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Р. С. Хайруллин; доктор физико-математических наук, профессор О. А. Репин

Ведущая организация – Самарский государственный педагогический университет

Защита состоится 20 декабря 2000 года в 17 часов 30 минут на заседании диссертационного совета К 053.29.27 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, д.17.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан ____________________ 2000 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физ. – мат. наук *Плещинский Н. Б.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Краевые задачи для вырождающихся и сингулярных эллиптических уравнений представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. (См. работы А.В.Бицадзе, М.М.Смирнова, И.А.Киприянова и др.).

Известно, что уравнения вида

$$\Delta_B u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_B = \Delta_{x'} + B_{x_p}$, $\Delta_{x'}$ *– оператор Лапласа*, $B_t = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{k}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}$ – сингулярный оператор Бесселя, связаны с вырождающимися эллиптическими уравнениями.

Вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера (теории малых изгибаний поверхностей вращения, безмоментной теории оболочек и т.д.). Особо значительную роль играют такие уравнения в газовой динамике.

Связь теории сингулярных эллиптических уравнений с теорией вырождающихся эллиптических уравнений позволила применить к ней методы, разработанные для последних. Работа И.Н.Векуа, где доказана корректность постановки задачи Дирихле для уравнения (1) в полуплоскости $x_2 > 0$ при $p = 2$ и $k < 1$, относится к числу первых и была основой для дальнейших исследований М.Н.Олевского, С.П.Пулькина, В.Ф.Волкодавова и др. В работах Ю.П.Кривенкова получены интегральные представления решения уравнения (1) при $p = 2$ через аналитические функции и применены к обоснованию постановки граничных условий на характеристической части границы области.

Впервые фундаментальные решения уравнения (1) при $k = 1$ и $p = 2$ были построены E.Beltrami; А.Вайнштейном этот результат был распространен на любое значение $k > 0$, а И.А.Киприяновым и В.И.Кононенко - на общие линейные B-эллиптические уравнения. В этих работах фундаментальные решения с особенностью в произвольной точке были построены с помощью оператора обобщенного сдвига. Такие фундаментальные решения могут быть применены к исследованию краевых задач с условием типа четности на характеристической части границы.

Число опубликованных работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям весьма значительно. В этих исследованиях в основном рассматривались вырождающиеся эллиптические уравнения первого рода. (См., напр., работы А.В.Бицадзе, И.Н.Векуа, Л.С.Парасюк и т.д.). Что касается вырождающихся эллиптических уравнений второго рода, то к числу первых в этом направлении относится работа М.В.Келдыша (1951 г.), где впервые указаны случаи, когда характеристическая часть границы области может освобождаться от граничных условий и заменяется условием ограниченности решения. Позже А.В.Бицадзе в своей работе указал, что условие ограниченности может быть заменено граничным условием с некоторой весовой функцией.

Одним из представителей вырождающихся эллиптических уравнений второго рода является уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (2)$$

которое впервые было рассмотрено И.Л.Каролем. Им были построены фундаментальные решения этого уравнения при $\alpha < 1$. Позже Р.С.Хайруллин в своей работе с помощью этих фундаментальных решений исследовал основные краевые задачи для уравнения (2) при тех же значениях α.

Среди методов решения краевых задач для сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений серьезного внимания заслуживает метод потенциалов. Метод потенциалов неоднократно применялся разными авторами к решению краевых задач для эллиптических уравнений как второго порядка, так и высших порядков и систем.

Целью настоящей работы является доказательство существования единственного решения основных краевых задач для некоторых сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений.

Методы исследования. В работе развиваются идеи и методы классической теории потенциала, теории функций действительной переменной, специальных функций, дифференциальных и интегральных уравнений.

Научная новизна:

1. Построены фундаментальные решения сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений.
2. Доказаны теоремы о принципе максимума для $T^{(p)}$, $T^{(p)}_{k,m}$, $T^{(2)}_{k,2}$-гармонических функций и на основе этого принципа доказаны единственность решения задач Дирихле для соответствующих уравнений.
3. Выведены формулы Грина для сингулярных и вырождающихся эллиптических операторов и на их основе доказаны единственность решения задач типа Неймана для сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений.
4. Построены поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев и основные краевые задачи для указанных уравнений редуцированы к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма

второго рода. Доказана однозначная разрешимость этих интегральных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер, заполняя определенный пробел в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений и найти приложение в теории краевых задач для уравнений смешанного типа, применяемых при решении многих важных вопросов прикладного характера.

Апробация работы. Весь материал, по мере его получения, обсуждался на семинаре кафедры математического анализа Казанского государственного педагогического университета (руководитель – профессор Ф.Г.Мухлисов). Были сделаны доклады на Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики", посвященной 40-летию мехмата КГУ (г.Казань, 1.10-3.10.2000), на Саратовской конференции "Современные проблемы теории функций и их приложения" (г.Саратов, 27.01-02.02.2000), на межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (г.Самара, 29.05-31.05.2000), на четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посвященном памяти М.А.Лаврентьева (Новосибирск, 26.06-1.07.2000) и на научно-практических итоговых конференциях в Казанском государственном педагогическом университете (г.Казань).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-14]. Из них [3], [14] выполнены в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежат здесь постановки задач и общие указания о путях решения.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 101 страницу и состоит из введения, двух глав, разбитых на 9 параграфов и 16 пунктов, и списка литературы из 46 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко охарактеризованы результаты автора, изложенные в последующих главах.

В первой главе рассматривается сингулярное эллиптическое уравнение

$$T^{(p)}(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i{}^2} + \frac{k}{x_p}\frac{\partial u}{\partial x_p} = 0 \qquad (0 < k < 1) \tag{3}$$

при $p = 2$ (двумерном) и $p > 2$ (многомерном) случаях. Построены фундаментальные решения в двумерном и многомерном случаях. Устанавливается принцип максимума и на основе этого принципа доказывается единственность решения задач Дирихле для указанных уравнений. Также методом потенциалов доказывается существование решения основных краевых задач.

В §1 строятся фундаментальные решения сингулярного эллиптического уравнения (3), выраженные через гипергеометрические функции. Вводятся понятия $T^{(2)}$ и $T^{(p)}$-гармонических функций, как регулярные решения уравнения (3) в областях, соответственно при $p = 2$ и $p > 2$. В §2 даются интегральные представления этих функций на основе первой и второй формул Грина для операторов $T^{(2)}$ и $T^{(p)}$ соответственно в двумерном и многомерном случаях. В этом же параграфе доказывается очень важная для последующих исследований теорема (на примере многомерного случая).

Теорема 1. *Если функция* $u(x', x_p) \in T^{(p)}(\overline{G^+})$, *то она принима-*

ет наибольшее и наименьшее значения на границе $\Gamma^+ \bigcup \Gamma^{(0)}$.

В §3 даются постановки основных краевых задач для уравнения (3) и доказываются единственность их решения. Ставятся следующие краевые задачи (на примере многомерного случая).

Внутренняя задача Дирихле (D_i^0). Требуется найти функцию $u(x)$, $T^{(p)}$-гармоническую в области G^+, непрерывную в $\overline{G^+}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} &u|_{\Gamma^+} = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma^+, \\ &u|_{\Gamma^{(0)}} = 0, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача Дирихле (D_e^0). Требуется найти функцию $u(x)$, $T^{(p)}$-гармоническую в области G_e^+, непрерывную в $\overline{G_e^+}$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} &u|_{\Gamma^+} = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma^+, \\ &u|_{\Gamma_e^{(0)}} = 0, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная функция.

Внутренняя задача типа Неймана (K_i). Требуется найти функцию $u(x)$, $T^{(p)}$-гармоническую в области G^+, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{G^+}$, непрерывную в $\overline{G^+}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma^+} = f(x), \qquad x \in \Gamma^+,$$

$$u|_{\Gamma^{(0)}} = 0,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача типа Неймана (K_e). Требуется найти функцию $u(x)$, $T^{(p)}$-гармоническую в области G_e^+, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{G_\epsilon^+}$, непрерывную в $\overline{G_\epsilon^+}$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma^+} = f(x), \qquad x \in \Gamma^+,$$

$$u|_{\Gamma_\epsilon^{(0)}} = 0,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция.

Доказывается следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Внутренние задачи Дирихле* (D_i^0) *и типа Неймана* (K_i), *а также внешние задачи Дирихле* (D_e^0) *и типа Неймана* (K_ϵ) *не могут иметь более одного решения.*

В §4 строятся потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (3), изучаются предельные значения этих потенциалов на границе области при $p = 2$ и $p > 2$. Краевые задачи сводятся к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, а также доказывается разрешимость этих интегральных уравнений на примере многомерного случая.

В §5 результаты, полученные в предыдущих четырех параграфах, применяются к исследованию основных краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения вида

$$T_{k,m}^{(p)}(u) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + x_p^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} + k x_p^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_p} = 0 \quad (0 < m < k < 1). \quad (4)$$

Построены фундаментальные решения, выраженные через гипергеометрические функции. Вводится понятие $T_{k,m}^{(p)}$-гармонических функций, как регулярное решение уравнения (4) в области, а также устанавливается принцип максимума. Рассматриваются следующие краевые задачи.

Внутренняя задача Дирихле (D_i^0). Найти функцию $u(x', x_p)$, непрерывную в $\overline{G^+}$, $T_{k,m}^{(p)}$-гармоническую в G^+ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma^{(0)}} = 0,$$

где $\varphi(P)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача Дирихле (D_e^0). Найти функцию $u(x', x_p)$, непрерывную в $\overline{G_e^+}$, равную нулю на бесконечности, $T_{k,m}^{(p)}$-гармоническую в G_e^+ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma_e^{(0)}} = 0,$$

где $\varphi(P)$ – непрерывная функция.

Внутренняя задача типа Неймана (K_i). Найти функцию $u(x', x_p)$, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{G^+}$, непрерывную в $\overline{G^+}$, $T_{k,m}^{(p)}$-гармоническую в G^+ и удовлетворяющую граничным условиям

$$A[u]|_{\Gamma^+} = \psi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma^{(0)}} = 0,$$

где $\psi(P)$ – непрерывная функция,

$$A[u] = \sum_{i=1}^{p-1} cos(x_i, \nu)\frac{\partial u}{\partial x_i} + x_p^m cos(x_p, \nu)\frac{\partial u}{\partial x_p},$$

ν – единичный вектор внешней нормали к Γ^+ в точке $P(x', x_p)$.

Внешняя задача типа Неймана (K_e). Найти функцию $u(x', x_p)$, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{G_e^+}$, непрерывную в $\overline{G_e^+}$, равную нулю на бесконечности, $T^{(p)}_{k,m}$-гармоническую в G^+_e и удовлетворяющую граничным условиям

$$A[u]|_{\Gamma^+} = \psi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$
$$u|_{\Gamma^{(0)}_e} = 0,$$

где $\psi(P)$ – непрерывная функция.

Верна следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Внутренние задачи Дирихле (D^0_i) и типа Неймана (K_i), а также внешние задачи Дирихле (D^0_e) и типа Неймана (K_e) не могут иметь более одного решения.*

Также с помощью одного из фундаментальных решений строятся потенциалы типа простого и двойного слоев. С помощью этих потенциалов основные краевые задачи для уравнения (4) редуцируются к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Во **второй главе** рассматривается вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T^{(2)}_{k,2}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ky \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (0 < k < 1). \tag{5}$$

В §1 построены фундаментальные решения уравнения (5) в терминах функции Макдональда. Также вводится понятие $T^{(2)}_{k,2}$-гармонических функций, как регулярное решение уравнения (5) в области, обращающееся в нуль при $y \to 0$. В §2 выведены формулы Грина для вырождающегося эллиптического оператора, а также доказывается принцип максимума.

Теорема 4. *Если функция $u(x,y) \in T^{(2)}_{k,2}(\widetilde{D^+})$ и тождественно не равна нулю, то она принимает положительное наибольшее и отрицательное наименьшее значения на границе Γ^+.*

В §3 даются постановки основных краевых задач.

Внутренняя задача (E_i). Найти функцию $u(x, y)$, непрерывную в $\widetilde{D^+}$, $T_{k,2}^{(2)}$-гармоническую в D^+ и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$

где $\varphi(P)$ - непрерывная функция.

Внешняя задача (E_e). Найти функцию $u(x, y)$, непрерывную в $\widetilde{D_e^+}$, равную нулю на бесконечности, $T_{k,2}^{(2)}$-гармоническую в D_e^+ и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$

где $\varphi(P)$ - непрерывная функция.

Внутренняя задача (K_i). Найти функцию $u(x, y)$, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{D^+}$, $T_{k,2}^{(2)}$-гармоническую в D^+ и удовлетворяющую граничному условию

$$A[u]|_{\Gamma^+} = \psi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$

где $\psi(P)$ - непрерывная функция,

$$A[u] = cos(x, \nu)\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 sin(x, \nu)\frac{\partial u}{\partial y},$$

ν - единичный вектор внешней нормали к Γ^+ в точке $P(x, y)$.

Внешняя задача (K_e). Найти функцию $u(x, y)$, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{D_e^+}$, равную нулю на бесконечности, $T_{k,2}^{(2)}$-гармоническую в D_e^+ и удовлетворяющую граничному условию

$$A[u]|_{\Gamma^+} = \psi(P), \qquad P \in \Gamma^+,$$

где $\psi(P)$ - непрерывная функция.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 5. *Внутренние задачи* (E_i) *и* (K_i), *а также внешние задачи* (E_e) *и* (K_e) *не могут иметь более одного решения.*

В §4 с помощью фундаментальных решений строятся потенциалы типа двойного и простого слоев. Также как в §4 главы 1 с помощью этих потенциалов основные краевые задачи для уравнения (5) сводятся к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их разрешимость.

В заключение выражаю глубокую признательность моему научному руководителю Фоату Габдулловичу Мухлисову за помощь и советы, оказанные мне при написании данной работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Асхатов Р. М. Принцип экстремума и задача Дирихле для одного сингулярного эллиптического уравнения / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 1999. - 14 с. - Библиогр.: 5 назв. - Деп. в ВИНИТИ 04.11.99, No.3289-B99.

2. Асхатов Р. М. Принцип экстремума и задача Дирихле для одного сингулярного эллиптического уравнения в многомерном случае / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 1999. - 14 с. - Библиогр.: 4 назв. - Деп. в ВИНИТИ 29.11.99, No.3525-B99.

3. Асхатов Р. М., Мухлисов Ф. Г. О потенциалах для одного сингулярного эллиптического уравнения в многомерном случае / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 2000. - 21 с. - Библиогр.: 4 назв. - Деп. в ВИНИТИ 02.02.00, No.234-B00.

4. Асхатов Р. М. О T-гармонических потенциалах // Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". - Саратов, 2000.

5. Асхатов Р. М. О потенциалах для одного вырождающегося эллиптического уравнения // Труды 10-й науч. межвуз. конф. "Математи-

ческое моделирование и краевые задачи." – Ч.3. – СамГТУ, ИАР. – Самара, 2000. – С. 20-21.
6. Асхатов Р. М. Краевые задачи для одного вырождающегося эллиптического уравнения / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 2000. – 26 с.– Библиогр.: 7 назв. – Деп. в ВИНИТИ 30.05.00, No.1559–В00.
7. Асхатов Р. М. Фундаментальные решения одного вырождающегося эллиптического уравнения // Неклассич. дифференц. уравнения: 4-ый Сиб. конгресс по прикл. и индустр. математике (ИНПРИМ-2000), посв. памяти М.А.Лаврентьева (Новосибирск, 26.06-1.07.00).– Новосибирск.: Изд-во Ин-та математики, 2000. – С. 43-44.
8. Асхатов Р. М. Решение краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов (часть 1) / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 2000. – 21 с. – Библиогр.: 7 назв. – Деп. в ВИНИТИ 23.06.00, No.1774–В00.
9. Асхатов Р. М. Решение краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов (часть 2) / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 2000. – 21 с. – Библиогр.: 7 назв. – Деп. в ВИНИТИ 23.06.00, No.1775–В00.
10. Асхатов Р. М. О потенциалах для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода в многомерном случае / Каз. гос. пед. университет. — Казань, 2000. – 27 с. – Библиогр.: 5 назв. – Деп. в ВИНИТИ 23.06.00, No.1776–В00.
11. Асхатов Р. М. О потенциалах для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода / Каз. гос. пед. университет. – Казань, 2000. – 26 с. – Библиогр.: 3 назв. – Деп. в ВИНИТИ 23.06.00, No.1777–В00.
12. Асхатов Р. М. Краевые задачи для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода // Изв. вузов. Математика. — Казань, 2000. – 21с. – Библиогр.: 3 назв. – Деп. в ВИНИТИ (в печа-

ти)
13. Асхатов Р. М. О потенциалах для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода // Труды математич. центра им. Н. И. Лобачевского (Материалы Междунар. науч. конф. (Казань. 1.10-3.10.2000)). - Т.5. - Казань.: УНИПРЕСС, 2000.- С. 25-27.
14. Асхатов Р. М., Мухлисов Ф. Г. О краевых задачах для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода // Труды математич. центра им. Н. И. Лобачевского (Материалы Междунар. науч. конф. (Казань, 1.10-3.10.2000)). - Т.5. - Казань.: УНИПРЕСС, 2000. - С. 27-28.

Асх-

Подписано к печати 15.11.2000

Тир.100 Зак.153-2000

Лаборатория офсетной печати Казгоспедуниверситета
420015 г. Казань, ул. Пушкина, 31.